Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación
CI–2511 Lógica Simbólica
Enero-Marzo 2011

Práctica 7

1. En manipulación de rangos aritméticos de cuantificaciones, hay varias propiedades aritméticas de mucha utilidad. Este y el siguiente ejercicio le muestran algunas de tales propiedades, y le ejercitan en el uso de las mismas.

   Nótese que por "propiedades aritméticas" nos referimos a <u>*teoremas*</u> de la aritmética, por lo que estos corresponden a afirmaciones universalmente ciertas a las que les puede aplicar todas las reglas de manipulación de teoremas ya conocidas por Ud. (en particular, sustitución, para obtener nuevos teoremas).

   En la aritmética de números enteros, se tienen los teoremas:
   (i) $x \leq y \equiv x < y + 1$
   (ii) $x \leq y \equiv x - 1 < y$

   Note que estas propiedades son universalmente ciertas sobre los enteros, mas no sobre los números reales. Por lo tanto, no son teoremas si los tipos son x,y: $\mathbb{R}$ pero sí son teoremas si los tipos son x,y: $\mathbb{Z}$.

   También se tiene el teorema: (iii) $x \leq y \equiv x < y \lor x = y$

   el cual sí es cierto tanto para números enteros como para números reales.

   Entonces, utilice (i), (ii) y (iii) para demostrar los teoremas siguientes sobre números enteros:
   $a \leq b \Rightarrow (a \leq i < b + 1 \equiv a \leq i < b \lor i = b)$
   y
   $a \leq b \Rightarrow (a \leq i < b + 1 \equiv a + 1 \leq i < b + 1 \lor i = a)$

   y utilice éstos para demostrar las reglas de separación de un término de cuantificaciones cualesquiera. Entre ellas:

   a) Teorema 8.23 (Gries)
   b) Ejercicio 8.5 (Gries)

2. También se tiene en la aritmética las siguientes propiedades de transitividad:

   (iv) $x \leq y \land y \leq z \Rightarrow x \leq z$
   (v) $x \leq y \land y < z \Rightarrow x < z$
   (vi) $x < y \land y \leq z \Rightarrow x < z$

   Note que esto es cierto tanto para enteros como para reales.

   Combine las propiedades (iv), (v) y (vi) con la traducción de implicación en términos de conjunción ($p \Rightarrow q \equiv p \land q \equiv p$) para demostrar los siguientes teoremas:

   $a \leq i \leq j < b \equiv a \leq i < b \land i \leq j < b$
   y
   $a \leq i \leq j < b \equiv a \leq j < b \land a \leq i \leq j$

   Utilice este resultado para obtener dos anidamientos diferentes de la siguiente cuantificación: $(\%i, j | a \leq i \leq j < b : E)$, donde, % denota cualquier operador cuantificable (esto es, binario, asociativo, conmutativo, y con neutro).

3. Demostrar:
   $(\sum i \mid 20 \leq i < 30 : 7^{i+5}) = (\sum i \mid 25 \leq i < 35 : 7^{i})$
4. Teniendo una secuencia de n números reales $s_0, s_1, s_2, ...s_{n-1}$, demostrar:
   $(\sum i \mid 0 \leq i < n : s_{n-1-i}) = (\sum i \mid 0 \leq i < n : s_i)$
5. Ejercicio 8.6 (Gries)
6. Ejercicio 8.7 (Gries)